Eine Abschweifung zu orthogonalen wie schiefwinkligen Trajektorien*

Leonhard Euler

§1 Im Begriff, die fast obsolete Frage über orthogonale Trajektorien in den Mittelpunkt zu rücken, müssen wir zuerst genau erklären, auf welche Art die Natur und Beschaffenheit der zu scheidenden Kurven in die Rechnung eingeführt werden sollte, dann müssen wir eine Methode erläutern, mit deren Hilfe die Trajektorien bestimmt werden können.

§2 Was zuerst die zu schneidenden Kurven betrifft, ist vor allem die deren Natur ausdrückende Gleichung zu betrachten und, weil ja unzählige Kurven mit derselben Gleichung erfasst werden müssen, muss außer den Koordinaten x und y eine gewisse Größe, welche wir mit dem Buchstaben a bezeichnen werden, als Parameter in der Gleichung enthalten sein, welche bis ins Unendliche variiert alle zu scheidenden Kurven darbiete, natürlich in solcher Weise, dass, solange dem Buchstaben a derselbe Wert zugeteilt wird, man eine Gleichung für eine einzige bestimmte zu schneidende Kurve hat; während aber die Werte dieses Buchstabens sukzessive vergrößert oder verringert werden, wollen wir zu immer anderen zu schneidenden Kurven gelangen. Wenn also beispielsweise die Gleichung $yy = ax$ vorgelegt war, sind in ihr alle Parabeln enthalten, die über derselben Achse beschrieben und mit demselben Scheitel versehen sind, sich aber in Bezug auf den Parameter a in beliebiger Weise voneinander unterscheiden. Aber diese Gleichung

*Originaltitel: "Digressio de traiectoriis tam orthogonalibus quam obliquangulis", zuerst publiziert in: *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 17* (1773, geschrieben 1771): pp. 205–248, Nachdruck in: Opera Omnia: Serie 1, Band 28, pp. 215 – 247, Eneström Nummer E433, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".

$$yy = fx + af,$$

wo f eine echt konstante Größe sei, wird unendliche viele Parabeln enthalten, die über derselben Achse mit demselben Parameter f beschrieben sind, aber deren Scheitel ununterbrochen entlang der Achse bewegt werden, natürlich wie dieselbe Parabel entlang der Achse bewegt alle zu scheidenden Kurven darstellt. Weiter umfasst die Gleichung $y = ax$ alle Geraden, die aus demselben Punkt heraus gezogen worden sind; aber diese Gleichung

$$yy = aa - xx$$

liefert alle um denselben Mittelpunkt herum beschriebenen Kreise.

Über die Natur der zu schneidenden Kurven

§3 Bevor also die Frage über die Trajektorien in Angriff genommen wird, ist die alle zu scheidenden Kurven erfassende Gleichung eingehend zu betrachten, welche, wie wir schon angemerkt haben, außer den Koordinaten den variablen Parameter a beinhalten muss, welchen sie einst mit der Bezeichnung des Moduls belegt haben, außer welchem irgendwelche anderen Konstanten wie f, g, h etc. eingehen könnten, welche natürlich für alle Kurven dieselben Werte beibehalten. Von Gleichungen dieser Art verdienen aber viele Gattungen betrachtet zu werden, zu deren erster mit Recht alle algebraischen Gleichungen gezählt werden, von welchem Grad auch immer sie waren; zur zweiten wollen wir die Gleichungen zählen, die freilich transzendent sind, aber dennoch entweder Logarithmen oder Kreisbogen beinhalten, weil ja diese Größen nun freilich genauso wie algebraische Größen behandelt zu werden pflegen. Wenn beispielsweise

$$y = a \arcsin \sqrt{2ax - xx} - \sqrt{2ax - xx}$$

war, werden in dieser Gleichung alle über derselben Basis beschriebenen Zykloiden ausgedrückt, wie auch immer der erzeugende Kreis verändert wird. Aber die dritte Gattung sei den Differentialgleichungen gewidmet, welche sich freilich nur transzendent integrieren lassen, von welcher Art oben

$$dy = \frac{Adx}{\sqrt{XX - AA}}$$

auftrat, wo X irgendeine Funktion von x und A eine von a sei. Über eine solche Gleichung lässt sich überhaupt nichts sagen, wenn nicht zuvor genau bestimmt worden ist, nach welchem Gesetz die Integration zu verstehen ist ausgeführt zu werden, ob natürlich die neue Konstante, die durch die Integration einzuführen ist, vom Parameter a abhängt oder nicht. Dieses Urteil scheint so am leichtesten gefällt werden zu können, dass wir sagen, dass die Integration so auszuführen ist, dass für $x = b$ gesetzt $y = c$ wird, auf welche Weise die Integration natürlich bestimmt wird, dann bleibt es uns aber überlassen, ob diese Buchstaben b und c wirklich konstant sind oder ob sie auf eine bestimmte Weise vom Parameter a abhängen. Es ist aber offensichtlich, dass in der Frage über die Trajektorien diese Natur der Größen b und c besonders betrachtet werden müssen, obgleich keine von ihnen in der Differentialgleichung selbst auftritt.

§4 Fast genauso verhält sich die Angelegenheit, wannimmer für die zu scheidenden Kurven irgendeine Differentialgleichung gegeben ist, worin wir die vierte Gattung festlegen wollen, wie beispielsweise

$$dy = Vdx,$$

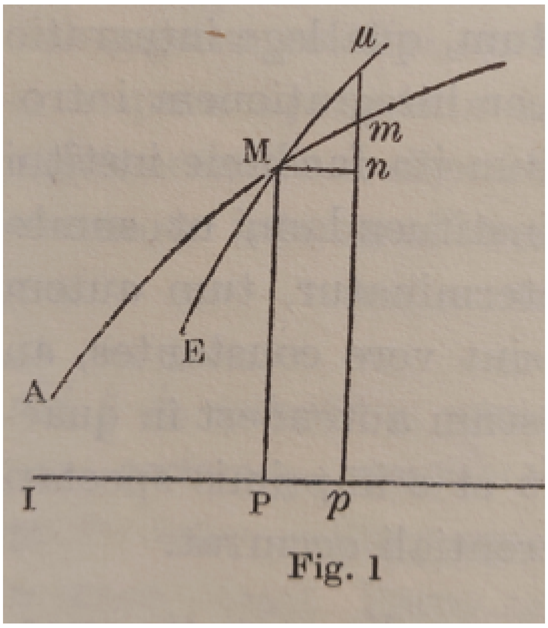
wo V irgendeine Funktion von x sowie y und dem Parameter a sei; auch wenn sich nämlich eine Gleichung von dieser Art vielleicht in keiner Weise integrierbar oder separierbar machen lässt, muss dennoch die bei uns festgelegte Integrationsweise so sein, dass für $x = b$ gesetzt $y = c$ wird, wo wiederum bestimmt werden muss, ob und auf welche Weise diese Größen b und c vom Parameter a abhängen, und dieses Urteil, wenn die Angelegenheit im Allgemeinen betrachtet wird, wird natürlich sehr schwierig sein.

§5 Die Aufgabe wird noch schwieriger erledigt werden, wannimmer die Gleichung für die zu scheidenden Kurven zwar eine Differentialgleichung von nur erstem Grad ist, aber die Differentiale selbst zu mehreren Dimensionen ansteigen, worin wir die *fünfte* Gattung festgelegten wollen, was auf angenehmste Weise so beschrieben werden kann, dass, wenn der Kürze wegen $\frac{dy}{dx} = p$ gesetzt wird, die Gleichung für die zu schneidende Kurve in beliebiger Art und Weise aus den Größen x, y, p und dem Parameter a zusammengesetzt war; dennoch sind indes für die Bestimmung der zu scheidenden Kurven dieselben Dinge festzuhalten, welche wir schon zuvor vorweg genommen haben. Aber wenn die Gleichung für die zu schneidenden Kurven sogar zu

Differentialen zweiten Grades ansteigt, wird eine um vieles größere Umsicht vonnöten sein, weil sie eine zweifache Integration erfordert und die Natur jeder der beiden eingehenden Konstanten vollkommen ersichtlich sein muss, dass auch diese beiden Konstanten klar voneinander unterschieden werden müssen, woher Fragen von dieser Art immer noch kaum in Betracht gezogen werden können.

Über Trajektorien im Allgemeinen

§6 Nachdem eine Gleichung für die zu scheidenden Kurven festgelegt worden ist, von welcher Gattung auch immer sie war, sei (Fig. 1) die Kurve AM auf einer derer, für welche der Parameter $= a$ ist, für den Punkt M seien die Koordinaten aber $IP = x$ und $PM = y$, sodass eine gewisse Gleichung zwischen diesen drei Größen x, y und a gegeben ist;



Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

weiter sei $EM\mu$ irgendeine Trajektorie, weil ihr Punkt M auch der zu schneidenden Kurve AM gemeinsam ist, wird sie auch die Koordinaten x und y gemeinsam haben, aber sofern diese Koordinaten auf die Trajektorie bezogen werden, wird die Gleichung zwischen x und y sehr stark von der oberen abweichen, während natürlich in dieser der Parameter a keinesfalls enthalten sein darf, weil ja dieselbe Trajektorie auf alle zu schneidenden Kurven gleichermaßen bezogen wird, woraus man nun einsieht, wie wir zur Gleichung für die Trajektorien gelangen können; natürlich wird die Schnittbedingung uns eine gewisse Gleichung an die Hand geben, in welche die drei Größen x, y und a in irgendeiner Weise eingehen; daher, wenn wir diese Gleichung mit der vorgehenden verbinden, werden wir den Parameter a mit bekannten Methoden eliminieren können und die zwischen x und y resultierende Gleichung wird die gesuchte Gleichung für die Trajektorie selbst sein.

§7 Weil nun im Problem der Trajektorien der Winkel $mM\mu$, welchen die Trajektorie mit den zu schneidenden Kurven bildet, konstant und sogar gegeben sein muss, wollen wir seinen Tangens $= \alpha$ setzen, und um seinen Wert ausfindig zu machen, betrachte man die unendlich nahe Ordinate $pm\mu$ der zu schneidenden Kurve in m, welche die Trajektorie aber in μ schneide, und für die Trajektorie wird der Bruch $\frac{dy}{dx}$ den Tangens des Winkels μMn ausdrücken, aber für das Finden des Winkels mMN differenziere man die gegebene Gleichung für die zu schneidenden Kurven und, weil auch der Parameter a dort für variabel gehalten wird, wird daraus eine Differentialgleichung von dieser Art entspringen:

$$dy = pdx + qda,$$

wo die Größen p und q auf beliebige Weise diese Buchstaben x, y und a beinhalte, wonach, weil für die Kurve AMm der Parameter a derselbe bleibt, man für das Element

$$\frac{nm}{Mn} = p$$

haben wird, welches der Tangens des Winkels mMn ist, woher man den Tangen der Differenz dieser Winkel μMm als

$$= \frac{dy - pdx}{dx + pdy} = \alpha$$

berechnet, und so haben wir nun jene andere Gleichung, welche

$$dy(1 - \alpha p) = dx(\alpha + p)$$

sein wird; diese müssen wir mit der für die zu schneidenden Kurven gegebenen Gleichung verbinden und den Parameter a aus ihr eliminieren, damit wird eine Gleichung zwischen x und y erhalten, mit welcher die Natur der Trajektorie ausgedrückt werden wird; hier ist aber sorgsam zu beachten, auch wenn in der gefundenen Gleichung

$$dy(1-\alpha p) = dx(\alpha + p)$$

nur die beiden Differentiale dx und dy enthalten sind, dennoch der Parameter a, sofern er natürlich über den Buchstaben p involviert wird, für variabel gehalten werden muss.

§8 Wenn es also geschieht, dass der Buchstabe p den Parameter a nicht beinhaltet, sondern nur aus den Koordinaten x und y zusammengesetzt ist, dann wird die gefundene Gleichung

$$dy(1-\alpha p) = dx(\alpha + p),$$

weil sie nur die zwei Variablen x und y enthält, die Natur der Trajektorie richtig ausdrücken; denn es ist nur vonnöten, ihr Integral ausfindig zu machen. Aber wenn die Größe p auch den Parameter a enthält, dann suche man aus der für die zu schneidenden Kurven gegebenen endlichen Gleichung den Wert von a durch x und y ausgedrückt, welcher in der Größe p anstelle von a eingesetzt eine reine Differentialgleichung für die gesuchte Trajektorie liefern wird; wenn eines Beispiels wegen die zu schneidenden Kurven von demselben Punkt I aus gezogene Geraden waren, für welche man diese Gleichung $y = ax$ habe, wird $p = a$ und $q = x$ sein, woher die andere Gleichung

$$dy(1-a\alpha) = dx(\alpha + a)$$

wird, wenn in welcher aus der gegebenen Gleichung $a = \frac{y}{x}$ geschrieben wird, wird für die Trajektorie diese Differentialgleichung hervorgehen

$$dy(x-\alpha y) = dx(\alpha x + y),$$

welche, weil sie homogen ist, für $y = ux$ gesetzt in diese transformiert wird

$$\frac{\alpha dx}{x} = \frac{du(1-\alpha u)}{1+uu} = \frac{du}{1+uu} - \frac{\alpha u du}{1+uu},$$

deren Integral ist:

$$\alpha \log x = \arctan u - \alpha \log \sqrt{1+uu} + \alpha \log c,$$

woher

$$\alpha \log \frac{x\sqrt{1+uu}}{c} = \arctan u$$

oder auch

$$\alpha \log \frac{\sqrt{xx+yy}}{c} = \arctan \frac{y}{x}$$

wird, mit welcher Gleichung die Natur einer logarithmischen Spirale ausgedrückt wird, wenn nicht $\alpha = \infty$ oder der Schnittwinkel ein rechter ist, in welchem Fall sie $\sqrt{xx+yy} = c$ wird, also ein Kreis.

§9 Aber oftmals passiert es, dass aus der gegebenen Gleichung der Wert von a nicht in bequemer Weise berechnet werden kann auch daher seine Substitution in der anderen Gleichung auch nicht geschehen kann, dann ist aber zu betrachten, dass zur Erkenntnis der Trajektorie nicht unbedingt eine reine Gleichung zwischen den Koordinaten x und y verlangt wird, sondern es ausreicht, eine Differentialgleichung zu finden, die nur zwei Variablen beinhaltet; so, wenn für die zu schneidenden Kurven die Ordinate y irgendeiner Funktion von x und a gleich wird und sie differenziert

$$dy = pdx + qda$$

liefert, sodass p und q nur Funktionen von x und a sind, dann schreibe man diesen Wert anstelle von dy in der gefundenen Gleichung und es wird diese Gleichung resultieren:

$$\alpha dx(1+pp) - qda(1-\alpha p) = 0,$$

weil welche nur die zwei Variablen a und x enthält, wird ihr Wert von x über a bestimmt werden können, was für die Konstruktion der Trajektorie ausreicht; denn dann wird für jedwede zu schneidende Kurve AMm, wo der Parameter a einen Wert erhält, eine Abszisse $IP = x$ bestimmt werden, woraus der Punkt M selbst, welcher zugleich auf der Trajektorie liegt, bekannt wird, und so werden vollkommen alle Punkte der Trajektorie gefunden werden. Wenn beispielsweise

$$y = a\sqrt{1 - xx}$$

war, wird

$$p = -\frac{ax}{\sqrt{1 - xx}} \quad \text{und} \quad q = \sqrt{1 - xx}$$

sein, welche Werte in jener Gleichung eingesetzt

$$\alpha dx(1 - xx + aaxx) - da(1 - xx)(\alpha ax + \sqrt{1 - xx}) = 0$$

liefern. Wenn wir aber sofort a aus der Gleichung

$$dy\left(1 + \frac{\alpha ax}{\sqrt{1 - xx}}\right) = dx\left(\alpha - \frac{ax}{\sqrt{1 - xx}}\right)$$

eliminieren, indem wir $a = \frac{y}{\sqrt{1-xx}}$ setzen, wird

$$dy(1 - xx + \alpha yx) = dx(\alpha - \alpha xx - yx)$$

hervorgehen, woher für den Fall der orthogonalen Trajektorien, wo $\alpha = \infty$ ist,

$$xydy = dx(1 - xx)$$

wird, welche durch x geteilt und integriert

$$\frac{1}{2}xx + \frac{1}{2}yy = \log\frac{x}{c}$$

liefert, welche eine endliche Gleichung für die orthogonale Trajektorie ist.

§10 Um aber diesen ganzen in sich sehr diffusen Gegenstand etwas zu ordnen, wollen wir die folgenden Fälle genauer entwickeln.

Erster Fall, in welchem der Parameter irgendeiner Funktion der zwei Koordinaten x und y gleich wird. Wenn die Gleichung für die zu scheidenden Kurven so beschaffen war, dass aus ihr der Wert des Parameters a mit einer Funktion von x und y bestimmt werden kann, gehe nach der Differentiation hervor:

$$da = Pdx + Qdy,$$

wo P und Q gewisse Funktionen von x und y sein werden, die, wie bekannt ist, so voneinander abhängen werden, dass

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$$

ist; weil ja also für denselben Parameter a

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P}{Q}$$

wird, setze man diesen Wert in der oberen [§ 7] gefundenen Gleichung anstelle von p ein, und man wird für die Trajektorie diese Gleichung

$$dy(Q + \alpha P) = dx(\alpha Q - P)$$

erhalten, welche also eine Differentialgleichung ist, mit welcher die Relation zwischen den Koordinaten der Trajektorie ausgedrückt wird, um welche zu integrieren eine Funktion von solcher Art zwischen x und y gesucht werden muss, mit welcher die Gleichung multipliziert integrierbar gemacht wird.

§11 Was hier über den Parameter a erwähnt worden ist, gilt auch für irgendeine Funktion des Parameters, welche $= A$ sei; wenn nämlich für die zu schneidenden Kurven $A =$ einer Funktion von x und y war und man

$$dA = Pdx + Qdy$$

setzt, wird man natürlich wie zuvor für die Trajektorien diese Gleichung haben:

$$dy(Q + \alpha P) = dx(\alpha Q - P),$$

wenn eines Beispiels wegen

$$A = a^m = x^n + y^n$$

war, wird

$$P = nx^{n-1} \quad \text{und} \quad Q = ny^{n-1},$$

woher man für die Trajektorien diese Gleichung haben wird

$$dy(y^{n-1} + \alpha x^{n-1}) = dx(\alpha y^{n-1} - x^{n-1});$$

wenn die Trajektorien also orthogonal sein müssen oder $\alpha = \infty$, wird die Gleichung

$$x^{n-1}dy = y^{n-1}dx$$

sein, welche integriert

$$\frac{1}{y^{n-2}} - \frac{1}{x^{n-2}} = \frac{1}{c^{n-2}}$$

gibt, wo der Fall $n = 2$ ausgenommen werden muss, in welchem

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

und daher

$$\log y = \log x + \log c \quad \text{oder} \quad y = cx$$

wird.

§12 Um diesen Fall auch anhand von etwas allgemeineren Beispielen zu illustrieren, sei X irgendeine Funktion von x und Y eine beliebige Funktion von y, und man setze der Kürze wegen

$$dX = X'dx \quad \text{und} \quad dY = Y'dy,$$

nach Festlegen wovon für die zu schneidenden Kurven $A = X + Y$ sei, es wird

$$P = X' \quad \text{und} \quad Q = Y'$$

sein, woher man für die Trajektorien diese Gleichung haben wird:

$$dy(Y' + \alpha X') = dx(\alpha Y' - X')$$

und daher für die orthogonalen

$$X'dy = Y'dx \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{Y'} = \frac{dx}{X'}.$$

§13 Wir wollen festlegen, dass nun für die zu schneidenden Kurven eine Gleichung von dieser Art $A = XY$ gegeben ist und es wird

$$P = X'Y, \quad Q = XY'$$

sein und daher wird für die Trajektorien diese Differentialgleichung entstehen

$$dy(XY' + \alpha X'Y) = dx(\alpha XY' - X'Y)$$

und daher für die orthogonalen

$$\frac{Ydy}{Y'} = \frac{Xdx}{X'};$$

wenn also

$$X = x^m, \quad Y = y^n$$

war, sodass für die zu schneidenden Kurven diese Gleichung vorgelegt wird

$$A = x^m y^n,$$

welche Gleichung unendlich viele Parabeln wie Hyperbeln höherer Ordnungen enthält, dann entspringt wegen

$$X' = mx^{m-1} \quad \text{und} \quad Y' = ny^{n-1}$$

für die orthogonalen Trajektorien diese Gleichung

$$\frac{ydy}{n} = \frac{xdx}{m},$$

deren Integral

$$\frac{1}{n}yy - \frac{1}{m}xx = \pm cc$$

ist, welche immer die für einen Kegelschnitt, genauer für eine Ellipse oder Hyperbel, ist.

§14 *Zweiter Fall,* in welchem die Ordinate y irgendeiner Funktion des Parameters a und der Abszisse x gleich wird. Für diesen Fall gehe nach Differenzieren hervor:

$$dy = Pdx + Qda,$$

wo P und Q gewisse Funktion von a und x sind und das von solcher Art, dass

$$\left(\frac{dP}{da}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$$

ist, weil woher, während a fest bleibt, daher $\frac{dy}{dx} = P$ ist, wird dieser Wert anstelle von p in der oben gefundenen Gleichung eingesetzt für die Trajektorien diese Gleichung geben

$$dy(1 - \alpha P) = dx(\alpha + P),$$

weil welche noch drei Variablen enthält, setze man anstelle von dy den gerade gegebenen Wert ein, und so wird diese Gleichung entspringen

$$Qda(1 - \alpha P) = \alpha dx(1 + PP),$$

welche nur die zwei Variablen x und a enthält, woher für jedweden Parameter a, das heißt für jede der zu schneidenden Kurve, die Abszisse $IP = x$ bestimmt werden kann, und daher der Punkt M auf der Trajektorie, was zur Konstruktion der Kurve ausreicht. Für die orthogonalen Trajektorien wird man also diese Gleichung haben

$$-PQda = dx(1 + PP) \quad \text{oder} \quad dx(1 + PP) + PQda = 0$$

und so geht die ganze Aufgabe nun darauf zurück, dass das Integral dieser Gleichung ausfindig gemacht wird.

§15 Wenn wir hier für die Beispiele $y = A + X$ oder $y = AX$ setzen wollen, ist es ersichtlich, dass diese selben Beispiele schon im vorhergehenden Fall behandelt worden sind; wir wollen also dieses ziemlich merkwürdige Bespiel betrachten

$$y = \sqrt{2ax - xx},$$

sodass die zu schneidenden Kurven unendlich viele Kreise sind, die sich gegenseitig im selben Punkt A berühren, deren Mittelpunkte auf derselben Gerade liegen. Daher wird

$$P = \frac{a-x}{\sqrt{2ax-xx}}, \quad Q = \frac{x}{\sqrt{2ax-xx}}$$

sein und daher

$$1 + PP = \frac{aa}{2ax-xx},$$

woher für die orthogonale Trajektorien diese Gleichung hervorgeht

$$aadx + (ax-xx)da = 0,$$

welche durch a^3xx geteilt

$$\frac{adx+xda}{aaxx} - \frac{da}{a^3} = 0$$

gibt, deren Integral

$$\frac{1}{ax} - \frac{1}{2aa} = \pm\frac{1}{2cc}$$

oder

$$cc(2a-x) = \pm aax$$

ist, welche in diese übergeht

$$cc(2ax-xx) = \pm aaxx,$$

weil aber

$$2ax - xx = yy$$

ist, wird nach Ziehen der Wurzel

$$cy = ax = \frac{xx+yy}{2},$$

sodass nach Eliminieren von a für die orthogonale Trajektorie diese Gleichung entspringt

$$2cy = xx + yy,$$

welche auch die für einen Kreis ist.

§16 *Dritter Fall*, in welchem die Abszisse x einer Funktion von y und des Parameters a gleich wird. Diese Gleichung liefere differenziert

$$dx = Pdy + Qda,$$

wo P und Q solche Funktionen von y und a sein werden, dass

$$\left(\frac{dP}{da}\right) = \left(\frac{dQ}{dy}\right)$$

ist; weil nun, während a fest bleibt, daher $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{P}$ wird, wird dieser Wert oben anstelle von P eingesetzt für die Trajektorien diese Gleichung geben

$$dy(P - \alpha) = dx(1 + \alpha P),$$

in welcher anstelle von dx der obere Werte eingesetzt werde, dass man die folgende, nur die zwei Variablen y und a beinhaltende Gleichung erhält

$$Qda(1 + \alpha P) + \alpha dy(1 + PP) = 0,$$

deren Auflösung die Konstruktion der Trajektorien an die Hand geben wird.

§17 Daher, wenn die Trajektorien orthogonal sein müssen oder $\alpha = \infty$, wird man für sie diese Gleichung haben:

$$PQda + dy(1 + PP) = 0,$$

aber wenn der Schnittwinkel verschwinden muss, was passiert, wenn die Trajektorien die vorgelegten Kurven berührt, wird man wegen $\alpha = 0$ diese Gleichung

$$Qda = 0 \quad \text{oder} \quad Q = 0$$

haben, welche Gleichung endlich ist, aus welcher y durch a oder umgekehrt a durch y bestimmt werden können wird, woher eine Trajektorie solcher Art resultieren wird, welche alle zu schneidenden Kurven berühre, wie wenn beispielsweise

$$x = \frac{2ay - aa}{f}$$

war, welche eine für unendlich viele auf gewisse Art in der Ebene gezogene Geraden ist; wegen

$$Q = \frac{2y - 2a}{f}$$

wird diese Gleichung $y = a$ eine Kurve liefern, die alle jene Geraden berührt und deren Gleichung zwischen den Koordinaten x und y wegen $a = y$

$$x = \frac{yy}{f}$$

sein wird, welche die für eine mit Parameter f beschriebene Parabel ist. Überdies, weil die Koordinaten miteinander vertauscht werden können, ist dieser Fall zu verstehen, vom vorhergehenden nicht abzuweichen.

§18 *Vierter Fall*, in welchem die Gleichung für die zu schneidenden Kurven zwischen den Koordinaten x, y und dem Parameter a homogen ist, sodass diese drei Größen zusammen überall dieselbe Anzahl an Dimensionen haben. Weil ja die vorgelegte Gleichung zwischen x, y und a homogen ist, wenn wir diese Substitutionen $x = at$ und $y = au$ machen, wird der Parameter a durch Teilung vollkommen herausgeworfen werden, sodass eine nur die zwei Variablen t und u beinhaltende Gleichung resultiert, mit welcher eine gewisse Relation zwischen t und u ausgedrückt werden wird, woher wir festlegen wollen, dass nach Nehmen der Differentiale $du = vdt$ hervorgeht, sodass so u wie v als Funktionen von t betrachtet werden können. Daher erlangen wir durch Differenzieren:

$$dx = adt + tda \quad \text{und} \quad dy = avdt + uda;$$

daher wird also für dieselbe zu scheidende Kurve AM, weil der Parameter a derselbe bleibt,

$$dx = adt \quad \text{und} \quad dy = avdt$$

sein, woher $\frac{dy}{dx} = v$ wird, welcher Wert in der oben gefundenen Gleichung anstelle von p geschrieben werden muss; man schreibe aber ebenda anstelle von dy und dx die gerade dargebotenen Werte, und man wird für die Trajektorien diese Gleichung erhalten

$$(avdt + uda)(1 - \alpha v) = (adt + tda)(\alpha + v),$$

welche nur die zwei Variablen t und a enthält, aus welcher wir

$$da(u - \alpha uv - \alpha t - tv) = \alpha adt(1 + vv)$$

finden, welche direkt separierbar ist und

$$\frac{da}{a} = \frac{\alpha dt(1 + vv)}{(u(1 - \alpha v) - t(\alpha + v))}$$

liefert.

§19 Mit dieser Gleichung wird also der Parameter a einer gewissen Funktion von t gleich werden, wenn welche anstelle von a in den wesentlichen Gleichungen $x = at$ und $y = au$ eingesetzt wird, so erhalten wir für x wie für y gewisse Funktionen von t, woher die Natur der Trajektorie sehr leicht erkannt wird: Ja man wird sogar, wenn die Größe t aus diesen Gleichungen eliminiert wird, zu einer reiner Gleichung zwischen den Koordinaten x und y für die gesuchte Trajektorie gelangen, weil welche die neue Konstante, eines Beispiels wegen c, die durch Integration eingeht, beinhaltet, werden wir nach ihrer Variation unendlich viele Trajektorien erlangen, damit was leichter erkannt wird, wollen wir festlegen, dass

$$\int \frac{\alpha dt(1 + vv)}{(u(1 - \alpha v) - t(\alpha + v))} = \log T$$

ist, und durch Integrieren wird $a = cT$ sein, woher wir für die Trajektorien diese Formeln

$$x = cTt \quad \text{und} \quad y = cTu$$

finden.

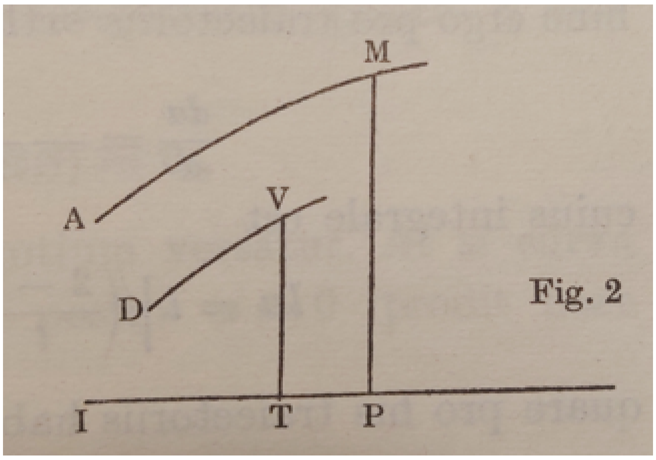
§20 Wenn wir also diesen Fall genauer betrachten, werden wir leicht feststellen, dass alle zu schneidenden Kurven in diesem Fall einander gleich sein werden. Man betrachte nämlich eine bestimmte Kurve, deren Ordinate t sei, die Ordinate hingegen u, also sei (Fig. 2) DV diese bestimmte Kurve, deren Abszisse $IT = t$ und die Ordinate $TV = u$ ist, wo natürlich zwischen t und u dieselbe Gleichung bestehe, nachdem aber diese Kurve beschrieben worden ist, wenn für einen beliebigen Wert des Parameters a diese Proportionen

$$1 : a = IT : IP \quad \text{und} \quad 1 : a = TV : PM$$

werden, ist es ersichtlich, dass

$$IP = at = x \quad \text{und} \quad PM = au = y$$

sein wird,



Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

und so wird der Punkt M auf einer dieser Kurven, die natürlich dem Parameter a zukommt, liegen, und so wird diese Kurve AM der Kurve DV vollkommen gleich sein, weil was für alle zu schneidenden Kurven gleichermaßen gilt, ist es klar, dass sie auch alle einander ähnlich sind, und umgekehrt, wenn alle zu schneidenden Kurven ähnlich waren, dann beschreibe man eine von ihnen aus dem Parameter $a = 1$ heraus, welche Kurve DV sei, wo V ein dem Punkt M homologer Punkt sei, und die Koordinaten $IT = t$ und $TV = u$ werden die sein, auf welche wir die eingangs erwähnte homogene Gleichung zurückgeführt haben. In gleicher Weise wird aber eingesehen, weil ja für die Trajektorien die Formeln $x = cTt$ und $y = cTu$ gefunden worden sind, dass all diese Trajektorien auch einander ähnliche Kurven sein werden, so dass, wenn eine, zum Beispiel für den Wert $c = 1$, beschrieben worden ist, alle übrigen aus ihr mithilfe des Ähnlichkeitsprinzips konstruiert werden können. Es ist aber offensichtlich, dass das Ähnlichkeitsprinzip auf den festen Punkt I bezogen werden muss, was sorgfältig zu bemerken ist, damit die Bedeutung der Ähnlichkeit nicht falsch verwendet wird. Hier wird nicht so sehr die absolute Ähnlichkeit der zu schneidenden Kurven betrachtet, wie die Ähnlichkeit in Bezug auf die Lage des festen Punktes I, welche so beschaffen verstanden werden muss, dass alle aus diesem Punkt I heraus gezogenen Geraden alle zu schneidenden Kurven in den homologen Punkten gleichermaßen durchlaufen.

§21 Eines Beispiels wegen wollen wir die schon oben behandelte Gleichung anführen

$$yy = 2ax - xx,$$

welche natürlich homogen, aber für $x = at$ und $y = au$ gesetzt in diese übergeht

$$uu = 2t - tt \quad \text{oder} \quad u = \sqrt{2t - tt},$$

sodass

$$v = \frac{1 - t}{\sqrt{2t - tt}}$$

ist, nach Einsetzen welcher Werte für die Trajektorien diese Differentialgleichung gefunden wird:

$$\frac{da}{a} = \frac{\alpha dt}{(t - \alpha\sqrt{2t - tt})\sqrt{2t - tt}}$$

daher wird man also für die orthogonalen Trajektorien haben

$$\frac{da}{a} = -\frac{dt}{2t - tt} = -\frac{dt}{2t} - \frac{dt}{2(2 - t)},$$

deren Integral

$$\log a = \log \sqrt{\frac{2 - t}{t}} + \log c \quad \text{oder} \quad a = c\sqrt{\frac{2 - t}{t}}$$

ist, woher wir für diese Trajektorien

$$x = c\sqrt{2t - tt} \quad \text{und} \quad y = c(2 - t)$$

haben werden, aus der zweiten wird

$$2 - t = \frac{y}{c} \quad \text{und} \quad t = \frac{2c - y}{c}$$

und daher

$$\sqrt{2t - tt} = \frac{\sqrt{2cy - yy}}{c} = \frac{x}{c},$$

und so resultiert diese Gleichung zwischen x und y

$$xx = 2cy - yy.$$

§22 *Fünfter Fall*, in dem so die Abszisse x wie die Ordinate y irgendeiner Funktion des Parameters a und einer gewissen Variable t gleich wird. Weil x eine Funktion der zwei Variablen t und a und ebenso y eine Funktion derselben ist, wollen wir festlegen, dass durch Differenzieren hervorgeht:

$$dx = Pdt + Qda \quad \text{und} \quad dy = Rdt + Sda,$$

wo zu bemerken ist, dass

$$\left(\frac{dP}{da}\right) = \left(\frac{dQ}{dt}\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{dR}{da}\right) = \left(\frac{dS}{dt}\right)$$

sein wird. Weil nun für dieselbe zu schneidende Kurve AM der Parameter a nicht variiert wird, wird für sie

$$\frac{dy}{dx} = \frac{R}{P}$$

sein, welcher Wert anstelle von p eingesetzt in der oben [§ 7] gegebenen allgemeinen Gleichung diese Gleichung liefert:

$$(Rdt + Sda)(P - \alpha R) = (Pdt + Qda)(\alpha P + R),$$

welche auf diese zurückgeführt wird:

$$da(PS - QR - \alpha(PQ + RS)) = \alpha dt(PP + RR).$$

§23 Wenn daher also orthogonale Trajektorien verlangt werden, wird man für $\alpha = \infty$ gesetzt für sie diese Gleichung haben

$$dt(PP + RR) + da(PQ + RS) = 0,$$

in deren Auflösung oder Integration die ganze Aufgabe besteht. Aber wenn die Kurve verlangt wird, die alle vorgelegten berührt, geht für $\alpha = 0$ diese endlich Gleichung hervor

$$PS - QR = 0.$$

Natürlich hat eine solche Kurve Geltung, wannimmer die zu schneidenden Kurven so beschaffen sind, dass je zwei einander unendliche nahe sich irgendwo berühren; denn dann wird die Kurve, die durch alle die Berührpunkte hindurchgeführt wird, zugleich alle berühren. Eine Berührung von dieser Art kann auf unendlich vielen geraden Linien passieren, die nach einem bestimmten Gesetz gezeichnet worden sind, welche sich im Allgemeinen auf unsere Weise darstelle lassen, dass

$$x = t \quad \text{und} \quad y = at + A$$

ist, wo A irgendeine Funktion von a bezeichnet, und es sei

$$dA = A' da,$$

in diesem Fall wird also

$$P = 1, \quad Q = 0, \quad R = a \quad \text{und} \quad S = A' + t$$

werden, woher man für die gesuchte Kurve

$$A' = t = 0$$

findet, sodass

$$x = A' \quad \text{und} \quad y = A - aA'$$

wird.

§24 *Sechster Fall,* in welchem für die einzelnen zu schneidenden Kurven nur eine nur Differentialgleichung zwischen den Koordinaten x und y gegeben ist.

Hier muss sorgfältig zwischen der Differentiagleichung, die nur auf die einzelnen zu schneidenden Kurven bezogen ist, und zwischen der Differentialgleichung unterschieden werden, die gänzlich alle zu schneidenden Kurven zugleich in sich umfasst, Gleichungen von welcher Art wir bisher in den behandelten Fällen verwendet haben, die in einer solchen Form

$$dy = pdx + qda$$

ausgedrückt sind, in welche natürlich die beiden Koordinaten x und y sowie auch der Parameter a als Variablen eingehen, deren Charakter also darin besteht, dass die drei Differentiale dx, dy und da in ihnen auftauchen.

§25 Aber Gleichungen, über welche in diesem Fall die Rede ist, beinhalten nur die zwei Differentiale dx und dy, auch wenn der Parameter a in sie eingeht, um wessen Beschaffenheit zu erklären, V eine beliebige Funktion der Abszisse x und des Parameters a sei, aber jedwede zu schneidende Kurve werde auf diese Weise definiert, dass $y = \int Vdx$ ist, in welcher Integration allein x als Variable angesehen wird, der Parameter a aber für konstant gehalten wird, denn auf diese Weise ist eine ganze Kurve aus den zu schneidenden vollkommen festgelegt, weil ja für sie der Parameter a tatsächlich konstant bleibt; denn, wenn für eine bestimmte Integration der Parameter a verändert wird, wird die Formel nacheinander auf alle zu schneidenden Kurven angewandt werden können, woher man schon zur Genüge einseht, wie die daraus entstandene Differentialgleichung $dy = Vdx$ bezeichnet wird, sich nur auf die einzelnen zu schneidenden Kurven zu erstrecken, aber nicht alle zugleich in sich zu umfassen.

§26 Nachdem also eine Differentialgleichung von dieser Art $dy = Vdx$ vorgelegt worden ist, ist sorgfältig zu betrachten, dass in ihr der Parameter a als konstant angesehen wird, sodass das Integral auf gewohnte Weise ausgedrückt $\int Vdx$ den Wert der Ordinate y darbietet, weil aber diese Integration eine neue Konstante erhält, muss ihre Bestimmung zugleich vorgeschrieben werden, weil ansonsten die Frage nicht bestimmt wäre, woher, wenn ein Fall von dieser Art vorgelegt wird, vor allem bei der Festlegung bestimmt werden muss, nach welchem Gesetz diese Integration durchzuführen ist, welche Bedingung so allgemein ausgedrückt werden kann, dass für $x = f$ auch $y = g$ wird, wo freilich die Größen f und g entweder völlig konstant sind oder auch auf eine gewisse Art vom Parameter a abhängen, sodass, während beim Verändern des Parameters a wir zu anderen zu schneidenden Kurven übergehen, auch den Buchstaben f und g andere Werte zugeteilt werden müssen. Es ist nämlich offensichtlich, wenn eine solche Bedingung nicht wie gesagt festgelegt worden ist, dass die Frage keinesfalls eine eindeutige ist.

§27 Obgleich aber eine solche Gleichung für die zu schneidenden Kurven ausreicht, lässt sie sich dennoch keinesfalls für die Bestimmung von Trajektorien verwenden; weil ja nämlich eine solche Formel $dy = Vdx$ unserem zweiten Fall zuzukommen scheint, wo

$$dy = Pdx + Qda$$

ist, besteht zuerst freilich kein Zweifel, dass hier $P = V$ ist, sondern die andere Größe Q, von welcher die Bestimmung der Trajektorien essentiell abhängt, weil wir ja für sie

$$Qda(1 - \alpha P) = \alpha dx(1 + PP)$$

gefunden haben, hier überhaupt nicht beurteilt wird.

§28 Sooft freilich die Formel $\int Vdx$ entweder integriert oder zumindest auf bekannte Quadraturen zurückgeführt werden kann, wird dieser Unannehmlichkeit leicht begegnet, denn das Integral $\int Vdx$ gefunden und, wie wir gerade zuvor erläutert haben, entsprechend bestimmt werde erneut differenziert, während nicht nur x, sondern auch a variabel angenommen wird, deren partielles Differential, welches das Element dx enthält, die vorgelegte Formel Vdx sein wird, der andere Anteil, der mit dem Element da behaftet ist, wird den wahren Wert jenes Glieds Qda geben, oder - noch kürzer - dieser Term Qda wird erhalten werden, wenn das Integral $\int Vdx$ allein nach der Variable a differenziert wird. Wannimmer sich aber die Formel Vdx auf diese Weise nicht integrieren lässt, dann steht noch kein anderer Weg offen, die Größe Q so zu erkennen, dass daraus eine Gleichung für die Trajektorien aufgestellt werden kann.

§29 Freilich ist die Methode bekannt, bei vollständigen Differentialen von dieser Art

$$dy = Pdx + Qda,$$

wenn der eine Teil Pdx gegeben ist, den anderen Qda ausfindig zu machen; weil nämlich

$$\left(\frac{dQ}{dx}\right) = \left(\frac{dP}{da}\right)$$

ist, kann dieser Wert $\left(\frac{dP}{da}\right)$ angegeben werden, und daher wird

$$dx\left(\frac{dQ}{dx}\right) = dx\left(\frac{dP}{da}\right)$$

werden, weil wo $dx\left(\frac{dQ}{dx}\right)$ ein Differential von Q für die Variable x allein ist, ist es offensichtlich, dass $Q = \int dx\left(\frac{dP}{da}\right)$ sein wird, wenn man freilich in dieser Integration nur x für die Variable hält. Für unseren Fall, wo $P = V$ ist, hätten wir

$$Q = \int dx\left(\frac{dV}{dx}\right)$$

und daher für die Trajektorien diese Gleichung

$$da(1-\alpha V)\int dx\left(\frac{dV}{da}\right) = \alpha dx(1+VV),$$

weil in welcher der Parameter a essentielle variabel ist, kann die Formel $\int dx\left(\frac{dV}{da}\right)$ überhaupt keinen Nutzen leisten, wenn diese Integration nicht tatsächlich ausgeführt werden kann. Nachdem diese Schwierigkeiten, denen der gegenwärtige Fall unterworfen ist, sorgfältig erklärt worden sind, wird es besonders der Mühe wert sein, einen Fall untersucht zu haben, in welchem sich die Trajektorien angeben lassen, auch wenn weder die Formel $\int Vdx$ noch $\int dx\left(\frac{dV}{da}\right)$ integriert werden kann, woher wir das folgende Problem vorgelegt wollen.

Problem

§30 Es wird gefragt, wie für die einzelnen zu schneidenden Kurven die Differentialgleichung $dy = Vdx$ (wo V so den Parameter a wie die Abszisse x beinhaltet) beschaffen sein muss, dass sich daraus Trajektorien bestimmen lassen, obgleich die Formel $\int Vdx$ auf keine Weise integrierbar ist.

Lösung

Die ganze Aufgabe geht also darauf zurück, dass wir einen Fall ausfindig machen, in welchen sich die Trajektorien ohne die Formel $\int dx\left(\frac{dV}{da}\right)$ bestimmen lassen, um welchem zu finden, einstweilen Q den Wert der Formel

$\int dx \left(\frac{dV}{da}\right)$ bezeichnet, dass die vollständige Differentialgleichung für alle zu schneidenden Kurven

$$dy = Vdx + Qda$$

ist, woher gemäß der zuvor gegebenen Lehren für die Trajektorien diese Gleichung gefunden worden ist

$$Qda(1 - \alpha V) = \alpha dx(1 + VV)$$

ist, weil welche die zwei Variablen a und x beinhaltet, wird eine gewisse Funktion von x und a gegeben sein, mit welcher multipliziert die Gleichung integrierbar wird, aber es ist ersichtlich, dass das Auffinden einer solchen Funktion im Allgemeinen keinen kleineren Schwierigkeiten unterliegt, als das selbst, was gefragt wird.

§31 Aber dennoch ist freilich ein gewisser Spezialfall gegeben, in welchem ein solcher Fund gelingt, und für dieses Ziel wollen wir unsere Gleichung in dieser Form darstellen:

$$\alpha dx \frac{(1 + VV)}{\alpha V - 1} + Qda = 0$$

und wir wollen nun eine Funktion nur von a suchen, welche A sei, mit welcher multipliziert diese Gleichung integrierbar wird, natürlich diese Form

$$\alpha A dx \frac{(1 + VV)}{\alpha V - 1} + AQda = 0,$$

welche mit der allgemeinen Form $Pdx + Qda$ verglichen, die integrierbar ist, wenn

$$\left(\frac{dP}{da}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$$

ist, uns diese Bedingung vorschreibt

$$\alpha \left(\frac{d.\frac{A(1+VV)}{\alpha V - 1}}{da}\right) = \left(\frac{d.AQ}{dx}\right) = A\left(\frac{dQ}{dx}\right),$$

aber aus der vorgelegten Gleichung selbst

$$dy = Vdx + Qda,$$

welche per Annahme integrierbar ist, ist

$$\left(\frac{dQ}{dx}\right) = \left(\frac{dV}{da}\right).$$

Wir wollen also den Bruch

$$\frac{A(1+VV)}{\alpha V - 1}$$

differenzieren, indem wir allein a als Variable nehmen, was geschieht, wenn wir $\left(\frac{dV}{da}\right)$ anstelle von dV und in gleicher Weise $\frac{dA}{da}$ anstelle von dA schreiben, und daher wird das erste Glied unserer letzten Gleichung

$$\frac{\alpha dA}{da} \cdot \frac{(1+VV)}{\alpha V - 1} = \alpha A \left(\frac{dV}{da}\right) \frac{(\alpha VV - 2V - \alpha)}{(\alpha V - 1)^2}$$

sein, aber das zweite Glied wird $A\left(\frac{dV}{da}\right)$ sein, sodass man nun diese Gleichung hat

$$\frac{\alpha dA}{da} \frac{(1+VV)}{\alpha V - 1} - A\left(\frac{dV}{da}\right) \frac{(1+\alpha\alpha)}{(\alpha V - 1)^2} = 0.$$

§32 In dieser Gleichung treten nur Differentiale von einer Art auf, nämlich $\frac{dA}{da}$ und $\left(\frac{dV}{da}\right)$, welche allein auf die Variablilität von a bezogen sind, sodass die Abszisse x nur als Konstante in ihr enthalten ist, woher, wenn wir nach Verwerfen der Klammern, welche natürlich nur wegen der zwei Variablen verwendet worden sind, nun x für konstant halten, werden wir diese Differentialgleichung haben:

$$\alpha dA(1+VV) - \frac{AdV(1+\alpha\alpha)}{\alpha V - 1} = 0,$$

mit welcher eine gewisse Relation zwischen A und V ausgedrückt wird, wobei wir die Abszisse x natürlich als konstant ansehen, finden wir nun daher sofort

$$\frac{\alpha dA}{A} = \frac{(1+\alpha\alpha)dV}{(\alpha V - 1)(1+VV)} = \frac{\alpha\alpha dV}{\alpha V - 1} - \frac{\alpha V dV + dV}{1+VV},$$

deren Integral

$$\alpha \log A = \alpha \log(\alpha V - 1) - \alpha \log \sqrt{1 + VV} - \arctan V + \alpha \log X$$

ist, wo wir anstelle der Konstante eine beliebige Funktion von x eingeführt haben, woher mit dieser Gleichung die Größe V auf eine bestimmte Weise durch A und X bestimmt wird, und daher wird sie eine Funktion von a und x sein, wie es in unserem Problem verlangt wird.

§33 Wenn man also für die einzelnen zu schneidenden Kurven diese Differentialgleichung hat $dy = Vdx$, oder diese Integralgleichung $y = \int Vdx$, wo V die Funktion von a und x sei, wie wir gerade gefunden haben, dann ist für die Trajektorien diese per Annahme integrierbare Gleichung gefunden worden

$$\alpha Adx \frac{(1 + VV)}{\alpha V - 1} + AQda = 0,$$

deren Integral gefunden werden wird, wenn allein das erste Glied für konstant gehaltenes a integriert wird, woher dieses Integral

$$\alpha A \int dx \frac{(1 + VV)}{\alpha V - 1} = C$$

sein wird, wo die Größe C entweder tatsächlich konstant ist, oder auf eine bestimmte Weise vom Parameter a abhängen wird, welche Art aus der Bedingung, nach welcher das Integral $\int Vdx$ genommen werden muss, zu entnehmen ist. Natürlich wird für jedwede zu schneidende Kurve aus ihrem Parameter a daraus die Abszisse x und daraus der Punkt M berechnet, welcher zugleich auf der Trajektorie liegt.

§34 Aber jene logarithmische Gleichung, mit welcher die Natur der Funktion V bestimmt wird, kann gefälliger so dargestellt werden

$$\arctan V = \alpha \log \frac{(\alpha V - 1)X}{A\sqrt{1 + VV}},$$

woher allgemein für irgendeinen Schnittwinkel der Wert von V sich keinesfalls finden lässt (Fig. 1); wir wollen aber den Fall betrachteten, in welchem orthogonale Trajektorien verlangt werden, weil nämlich dann $\alpha = \infty$ und daher $\alpha V - 1 = \alpha V$ wird, wird unsere Gleichung

$$\frac{1}{\alpha} \arctan V = \log \frac{\alpha VX}{A\sqrt{1 + VV}} = 0$$

werden, woher folgt, dass

$$\frac{\alpha VX}{A\sqrt{1+VV}} = 1 \quad \text{oder} \quad \frac{V}{\sqrt{1+VV}} = \frac{A}{\alpha X}$$

sein muss, weil hier nichts verhindert, dass wir X für αX schreiben, werden wir

$$\frac{V}{\sqrt{1+VV}} = \frac{A}{X}$$

haben, daher berechnen wir aber weiter

$$V = \frac{A}{\sqrt{XX-AA}} \quad \text{und} \quad \sqrt{1+VV} = \frac{X}{\sqrt{XX-AA}}.$$

§35 Als logische Konsequenz, wenn für die zu schneidenden Kurven diese Differentialgleichung vorgelegt war:

$$dy = \frac{Adx}{\sqrt{XX-AA}},$$

wo X irgendeine Funktion von x und A eine von a ist, werden wir orthogonale Trajektorien finden können, werden wir für sie nämlich diese Gleichung haben

$$\int \frac{XXdx}{\sqrt{XX-AA}} = C,$$

wo C entweder eine konstante Größe ist oder auf gewisse Weise vom Parameter a abhängen wird, so wie es natürlich die Bedingung der Integration der Formel

$$\int \frac{Adx}{\sqrt{XX-AA}}$$

erfordert. Hier sind wir also wieder jeder Erwartung zu denselben Trajektorien gelangt, welche wir oben aus der Natur der Brachistrochronen erhalten haben.

§36 Damit aber klarer wird, wie die Größe C von den Bedingungen der Integration für die zu schneidenden Kurven abhängt, werden wir auf die folgende Weise erschließen können; wir wollen festlegen, dass diese Integration so durchgeführt wird, dass

$$y = \int \frac{Adx}{\sqrt{XX-AA}} + B$$

wird, wo B entweder eine wirklich konstante Größe oder eine irgendwie von a abhängige bezeichnet, während das Integral selbst für $x = 0$ oder einem anderen Wert gleich gesetzt verschwindet und, weil wir diese Differentialgleichung im Allgemeinen angenommen haben

$$dy = Pdx + Qda,$$

wird dieses letzte Glied Qda den Term dB umfassen, und daher wird nach Verwerfen der von x abhängigen Terme

$$Qda = dB$$

sein. Weil wir nun für die orthogonalen Trajektorien diese Integralgleichung gefunden haben

$$\int \frac{XXdx}{\sqrt{XX - AA}} - C = 0$$

und dieses Differential in der Form

$$\alpha A \frac{dx(1 + VV)}{\alpha V - 1} + AQda = 0$$

enthalten sein muss, ist es notwendig, dass dieses letzte Glied $AQda$ dem Term $-dC$ gleich wird, werde nach Verwerfen der von x abhängigen Terme, während diese Integration nach demselben Gesetz durchgeführt wird wie zuvor, woher, weil

$$Qda = dB$$

ist, nun

$$dC = -AdB$$

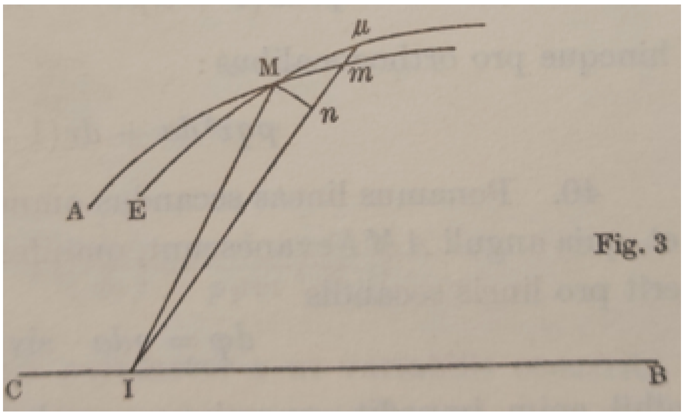
und daher

$$C = E - \int AdB$$

werden wird, wo E eine tatsächlich wahre konstante Größe bezeichnet. Wannimmer also, wie es bei den Brachistochronen passiert, der Buchstabe B entweder verschwindet oder tatsächlich konstant ist, dann wird der Buchstabe C eine tatsächliche Konstante bezeichnen, wie wir gerade gefunden haben.

Deswegen erstreckt sich diese Bestimmung um vieles weiter als jene, welche aus den Brachistrochronen entnommen worden war, weil sich ja hier für B irgendeine Funktion von A annehmen lässt, wohingegen dort $B = 0$ war.

§37 *Siebter Fall*, in welchem die Gleichung (Fig. 3) für die zu schneidenden Kurven auf einen festen Punkt bezogen wird. Es sei also I jener feste Punkt, auf welchen zuerst die zuschneidenden Kurven AMm bezogen werden und welcher Punkt über den Abstand $IM = v$ und den Winkel $CIM = \varphi$ von der festen Richtung IC genommen worden ist, und für diese Kurve Amm sei der Parameter $= a$, variabel, wenn wir zu anderen zu schneidenden Kurven übergehen, hingegen konstant, solange wir auf derselben Kurve bleiben.



Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

Es wird also für die zu schneidenden Kurven eine Gleichung zwischen v, φ und a gegeben sein, aus deren Differentiation

$$d\varphi = pdv + qda$$

hervorgehe, woher für die zu schneidende Kurve AMm

$$d\varphi = pdv$$

sein wird, woher sich der Winkel AMI bestimmen lässt, welchen diese Kurve mit der Gerade IM bildet, dessen Tangens, welcher im Allgemeinen $\frac{vd\varphi}{dv}$ ist, für diesen Fall $= pv$ sein wird.

§38 Es sei nun die Kurve $EM\mu$ irgendeine Trajektorie, die die Kurve AM unter dem Winkel AME schneidet und dessen Tangens wie zuvor $= \alpha$ sei, und weil dieselben Variablen v und φ sich auch auf die Trajektorien erstrecken, für welche der Parameter a natürlich als variabel angesehen werden muss, wird der Tangens des Winkels $IME = \frac{vd\varphi}{dv}$ sein, nach Vergleich welches Winkels mit dem vorhergehenden der Tangens der Differenz von diesen berechnet wird, das heißt

$$\tan AME = \frac{pv - \frac{vd\varphi}{dv}}{1 + \frac{pvvd\varphi}{dv}} = \frac{v(pdv - d\varphi)}{dv + pvv\varphi} = \alpha,$$

sodass für die Trajektorien diese Gleichung resultiert

$$(vp - \alpha)dv = vd\varphi(1 + \alpha pv),$$

welche für die orthogonalen Trajektorien wegen $\alpha = \infty$ in diese übergeht

$$dv + pvvd\varphi = 0;$$

diese Gleichung muss also mit der vorhergehenden so verbunden werden, dass in ihr nur zwei Variablen enthalten sind, und auf diese Weise wird das Finden der Trajektorien auf eine gewöhnliche Differentialgleichung zwischen zwei Variablen geführt.

§39 Wenn also die Gleichung für die zu schneidenden Kurven so beschaffen war, dass der Winkel φ mit einer Funktion von v und a ausgedrückt werden kann, dann werden in der Differentialgleichung

$$d\varphi = pdv + qda$$

die Buchstaben p und q gegebene Funktionen von v und a sein, sodass $\left(\frac{dp}{da}\right) = \left(\frac{dq}{dv}\right)$ ist; nachdem dieser Wert nun für $d\varphi$ eingesetzt worden ist, wird für die Trajektorien im Allgemeinen diese Gleichung entspringen

$$qvda(1 + \alpha pv) + \alpha dv(1 + ppvv) = 0$$

und daher für die orthogonalen:

$$pqv^2da + dv(1 + ppvv) = 0.$$

§40 Wir wollen festlegen, dass die zu schneidenden Kurven alle von dem Punkt I aus gezogene Geraden sind und, weil die Winkel AMI verschwinden, ist es offenkundig, dass $p = 0$ sein wird, und daher wird die Gleichung für die zu schneidenden Linien

$$d\varphi = qda \quad \text{oder} \quad d\varphi = da;$$

denn nichts hindert daran, dass wir den Winkel φ als Parameter a betrachten, sodass $q = 1$ ist, dann werden wir also für die Trajektorien diese Gleichung haben:

$$vda + \alpha dv = 0$$

oder wegen $da = d\varphi$ diese

$$vd\varphi + \alpha dv = 0,$$

sodass

$$\frac{vd\varphi}{dv} = -\alpha$$

ist, woher klar ist, dass die Trajektorie eine logarithmische Spirale ist, die alle Radien IM in einem konstanten Winkel, dessen Tangens $= -\alpha$ ist, schneidet, und wenn $\alpha = \infty$ war, wird $dv = 0$ oder $v = c$ und daher $IM = c$, in welchem Fall die Trajektorie ein mit dem Radius c beschriebener Kreis sein wird.

§41 Wir wollen die allgemeine Gleichung beibehalten:

$$d\varphi = pdv + qda,$$

sodass für irgendeine zu schneidende Kurve $\varphi = \int pdv$ ist, und wir wollen annehmen, dass diese Formel nicht integriert werden kann, sodass daraus q nicht erkannt wird, und wir wollen wie im dem sechsten Fall beigefügten Problem die Natur der Funktion p suchen, dass die Trajektorie konstruiert werden kann, weil für welche die Gleichung

$$qda + \frac{\alpha dv(1 + ppvv)}{v(1 + \alpha pv)} = 0$$

ist, wollen wir wie oben festlegen, dass diese Gleichung integrierbar gemacht wird, wenn sie mit irgendeiner Funktion A von a multipliziert wird; damit wir aber keine Irrwege beschreiten, wollen wir nur orthogonale Trajektorien betrachten, für welche diese Gleichung

$$Aqda + Adv\frac{(1+ppvv)}{pvv} = 0$$

integrierbar sein muss; es ist also notwendig, dass

$$A\left(\frac{dq}{dv}\right) = \frac{dA}{da}\left(\frac{1}{pvv} + p\right) + A\left(\frac{d\left(\frac{1}{pvv}+p\right)}{da}\right)$$

ist; aber andererseits ist

$$\left(\frac{dq}{qv}\right) = \left(\frac{dp}{da}\right),$$

woher diese Gleichung diese Form annehmen wird

$$A\left(\frac{dp}{da}\right) = \frac{dA}{da}\left(\frac{1}{pvv} + p\right) + A\left(\left(\frac{dp}{da}\right) - \frac{1}{ppvv}\left(\frac{dp}{da}\right)\right).$$

§42 Weil in diesen Differentialen allein der Parameter a als eine Variable auftritt, wollen wir tatsächlich v wie eine Konstante betrachten und wir werden diese Gleichung erhalten

$$dA\left(\frac{1}{pvv} + p\right) = \frac{Adp}{ppvv},$$

woher

$$\frac{dA}{A} = \frac{dp}{p(1+ppvv)} = \frac{dp}{p} - \frac{pvvdp}{1+ppvv}$$

wird, welche integriert

$$\log A = \log\frac{p}{\sqrt{1+vvpp}} + \log V \quad \text{oder} \quad \frac{p}{\sqrt{1+vvpp}} = \frac{A}{V}$$

gibt, woher man

$$p = \frac{A}{\sqrt{VV - AAvv}} \quad \text{und} \quad \sqrt{1+ppvv} = \frac{V}{\sqrt{VV-AAvv}}$$

berechnet.

§43 Als logische Konsequenz, wenn für die zu schneidenden Kurven diese Gleichung gegeben ist

$$\varphi = \int \frac{Adv}{\sqrt{VV - AAvv}},$$

wo V irgendeine Funktion von v und A eine von a bezeichnet, wird für die orthogonalen Trajektorien dann diese Differentialgleichung berechnet:

$$Aqda + \frac{VVdv}{vv\sqrt{VV - AAvv}} = 0,$$

weil welche per se integrierbar ist, wird sich die endliche Gleichung so verhalten

$$\int \frac{VVdv}{vv\sqrt{VV - AAvv}} = C,$$

in welcher Integration der Parameter a für konstant gehalten wird. Und diese Gleichung für die zu schneidenden Kurven ist dieselbe, welche wir in der oberen Abhandlung in Paragraph 30 aus den Brachistochronen abgeleitet haben, wenn wir hier nur u anstelle von v, aber vuu anstelle von V schreiben.

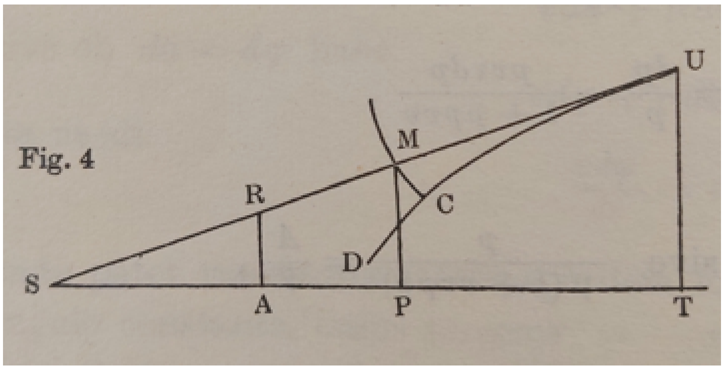
Eine umfassendere Entwicklung der Fälle, in denen die zu schneidenden Kurven Geraden sind

Problem 1

Wenn die zu scheidenden Geraden so gezeichnet worden waren, dass die einzelnen eine gegebene Kurve berühren, die Kurve zu finden, welche diese Geraden in einem gegebenen Winkel schneidet.

Lösung

Es sei (Fig. 4) die Kurve DU auf die Achse AT bezogen und es wird die vorgelegt, für welche die Abszisse $AT = t$ und die Ordinate $TU = u$ sei, sodass u eine beliebige gegebene Funktion von t ist,



Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

nun zeichne man vom Punkt U dieser Kurve aus die unbestimmte Tangente US, welche also eine aus unseren zu schneidenden Kurven sein wird, woher, wenn auf ihr irgendein Punkt M genommen wird, die oben verwendeten Koordinaten nun $AP = x$ und $PM = y$ sein werden, zwischen welchen nun die Gleichung gefunden werden muss, indem man natürlich den variablen Parameter a einführt. Weil sich ja aber diese zu scheidende Gerade von den übrigen darin unterschiedet, dass diese die gegebene Kurve selbst im Punkt U berührt, wird dieser Punkt U selbst die Bedeutung des Parameters enthalten, und die Abszisse $AT = t$ lässt sich als Parameter ansehen, und nun wird u eine Funktion des Parameters t sein, aus der Natur dieser Funktion wird aber der Winkel bekannt, in welchem diese Gerade US zu unserer Achse geneigt ist und dessen Tangens $\frac{du}{dt} = v$ ist.

Aber wir werden diesen Winkel auch aus unseren Koordinaten x und y aus dem Vergleich mit t und u bestimmen können, denn der Tangens dieses Winkels wird auch $= \frac{u-y}{t-x} = v$ sein, woher durch Variieren von t die Gleichung für alle zu schneidenden Kurven

$$y = vx + u - tv$$

sein wird, welche außer den Variablen x und y darüber hinaus den Parameter t und die Funktionen u und v von ihm enthält, welcher anstelle des Buchstaben a eingesetzt verstanden werden muss. Weil wir ja aber $du = vdt$ gesetzt haben, sei weiter $dv = wdt$, und nun wird die Differentialgleichung für die zu schneidenden Kurven sein:

$$dy = vdx + (xw - wt)dt = vdx + (x - t)wdt,$$

welche mit unserer allgemeinen Form

$$dy = pdx + qda$$

verglichen wegen $a = t$

$$p = v \quad \text{und} \quad q = (x - t)w$$

liefert.

Daher werden wir also für irgendwelche Trajektorien, während der Tangens des Schnittwinkels $= \alpha$ ist, diese Gleichung haben

$$qdt(1 - \alpha p) = \alpha dx(1 + pp),$$

wo p eine Funktion des Parameters t ist, welche nach Einsetzen der Werte in diese Form übergeht

$$wdt(1 - \alpha v)(x - t) = \alpha dx(1 + vv)$$

oder in diese

$$dv(1 - \alpha v)(x - t) = \alpha dx(1 + vv),$$

welches also die Gleichung für alle Trajektorien ist.

Wir wollen zuerst $\alpha = 0$ setzen, sodass alle zu schneidenden Kurven von der Trajektorie berührt werden müssen, und wir werden $x = t$ haben, woher $y = u$ wird, und so geht die Kurve selbst hervor, deren Tangenten per Annahme unsere Linien sind, welcher Fall per se offensichtlich ist.

Wir wollen aber weiter $\alpha = \infty$ setzen, dass die orthogonalen Trajektorien hervorgehen, woher all jene Kurven hervorgehen müssen, die aus der Entwicklung der Kurve DU entspringen; nachdem aber $\alpha = \infty$ gesetzt worden ist, geht unsere Gleichung in diese über

$$-vdv(x - t) = dx(1 + vv) \quad \text{oder} \quad -\frac{vdv}{1 + vv} = \frac{dx}{x - t},$$

welche nur zwei Variablen enthält, nachdem sie in dieser Form dargestellt worden ist

$$tvdv = dx(1 + vv) + xvdv,$$

welche durch $\sqrt{1+vv}$ geteilt offenbar integrierbar wird

$$\frac{tvdv}{\sqrt{1+vv}} = dx\sqrt{1+vv} + \frac{xvdv}{\sqrt{1+vv}};$$

denn das Integral ist

$$x\sqrt{1+vv} = \int \frac{tvdv}{\sqrt{1+vv}} = t\sqrt{1+vv} - \int dt\sqrt{1+vv} + C,$$

wo die Formel

$$\int dt\sqrt{1+vv}$$

den Bogen der vorgelegten Kurve DU bezeichnet, weiter, wenn vom Punkt A aus zu Achse hin das Lot, das die Gerade MS in R schneidet, gefällt wird, wird

$$UR = t\sqrt{1+vv}$$

und daher

$$RM = RU - DU + C$$

sein, sodass

$$DU = MU + C$$

ist; man trenne also in der Figur einen Bogen $DC = C$ ab, dass die Gerade UM dem Stück UC gleich wird, und nun ist es offenkundig, dass der Punkt M auf der durch Abrollen entstandenen Kurve CM liegt, wobei der Anfang des Abrollens im Punkt C gemacht worden ist. Aber wenn wir die Gleichung für diese Kurve CM verlangen, haben wir aus der gefundenen Gleichung sofort

$$x = t - \frac{\int dt\sqrt{1+vv}}{\sqrt{1+vv}},$$

und daher weiter

$$y = u - \frac{v\int dt\sqrt{1+vv}}{\sqrt{1+vv}},$$

woher, wenn sich die Variable t eliminieren ließe, man eine reine Gleichung zwischen x und y für die gesuchte Kurve hätte.

Aber wir wollen sehen, wie die Trajektorie aussehen wird, wenn der beliebige Schnittwinkel konstant war, dann werde aber die gefundene Gleichung auf diese Form gebracht

$$\alpha dx(1+vv) - xdv(1-\alpha v) = tdv(\alpha v - 1)$$

oder

$$dx - \frac{xdv(1-\alpha v)}{\alpha(1+vv)} = \frac{tdv(\alpha v-1)}{\alpha(1+vv)},$$

welche mit der allgemeinen Form verglichen

$$dx + Pxdv = Qdv$$

integrierbar gemacht wird, wenn sie mit $e^{\int Pdv}$ multipliziert wird, denn dann wird das Integral

$$xe^{\int Pdv} = \int e^{\int Pdv} Qdv$$

sein; weil also hier

$$Pdv = \frac{dv(\alpha v - 1)}{\alpha(1+vv)}$$

ist, wird

$$\int Pdv = \log\sqrt{1+vv} - \frac{1}{\alpha}\arctan v$$

sein, und daher

$$e^{\int Pdu} = e^{-\frac{1}{\alpha}\arctan u}\sqrt{1+vv},$$

weshalb wir wegen

$$Q = \frac{t(\alpha v - 1)}{\alpha(1+vv)} = tP,$$

woher

$$\int e^{\int Pdv} \cdot Qdv = \int e^{\int Pdv} tPdv = te^{\int Pdv} - \int dte^{\int Pdv}$$

sein wird, sodass

$$x = t - e^{-\int Pdv} \int dte^{\int Pdv}$$

wird, nach der Substitution

$$x = t - \frac{e^{\frac{1}{\alpha}\arctan v}}{\sqrt{1+vv}} \int dt \cdot e^{-\frac{1}{\alpha}\arctan v} \sqrt{1+vv}$$

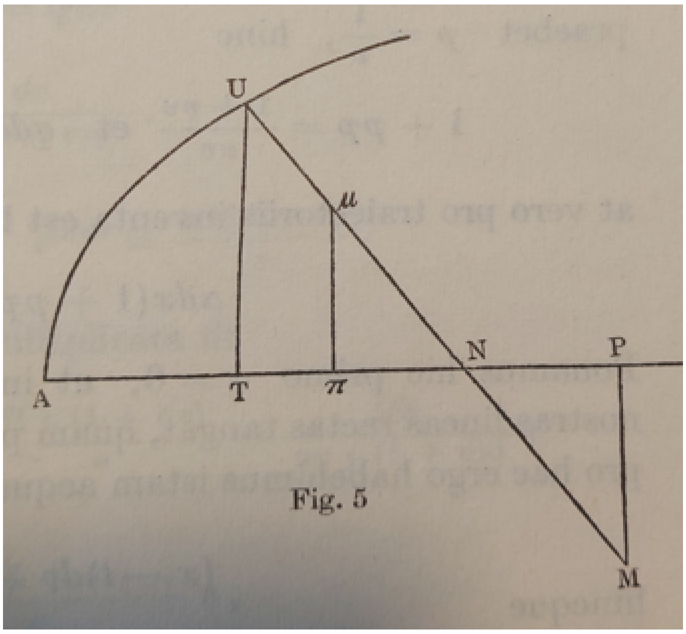
und daher

$$y = u - \frac{ve^{\frac{1}{\alpha}\arctan v}}{\sqrt{1+vv}} \int dt \cdot e^{-\frac{1}{\alpha}\arctan v} \sqrt{1+vv}$$

haben werden.

Problem 2

Es seien (Fig. 5) die zu schneidenden Geraden so gezeichnet, dass die einzelnen UM normal zur gegebenen Kurve AU sind, und man suche die Trajektorien für jedweden Schnittwinkel.



Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

LÖSUNG

Für die gegebene Kurve AU sei wiederum die Abszisse $AT = t$ und die Ordinate $TU = u$, dann aber sei $du = vdu$, sodass diese Größen als Funktionen des variablen Parameters angesehen werden, nachdem nun zum Punkt U die Normale UMN gezeichnet worden ist, ist bekannt, dass der Tangens des Winkels $TUN = v$ sein wird, wegen der Subnormale

$$TN = \frac{udu}{dt} = uv$$

und daher der Normalen

$$UN = u\sqrt{1+vv}.$$

Weil nun die Gerade UNM eine aus den zu schneidenden ist, nehme man auf ihr einen beliebigen Punkt M und nach Nennen der Koordinaten

$$AP = x \quad \text{und} \quad PM = y$$

wird

$$TP = x - t \quad \text{und} \quad UT + PM = u + y$$

sein; es ist aber offenkundig, dass $v = \frac{x-t}{u+y}$ sein wird, woher man diese Gleichung ableitet

$$y = \frac{x}{v} - u - \frac{t}{v}.$$

Man differenziere diese Gleichung nun und man wird finden:

$$dy = \frac{dx}{v} - \frac{xdv}{vv} - vdt - \frac{dt}{v} + \frac{tdv}{vv},$$

welche mit der allgemeinen Form verglichen

$$dy = pdx + qda$$

$p = \frac{1}{v}$ liefert, daher

$$1 + pp = \frac{1+vv}{vv} \quad \text{und} \quad qda = -\frac{xdv}{vv} - dt\frac{1+vv}{v} + \frac{tdv}{vv},$$

aber für die Trajektorien ist diese Gleichung gefunden worden

$$\alpha dx(1 + pp) = qda(1 - \alpha p).$$

Wir wollen hier zuerst $\alpha = 0$ setzen, dass wir die Trajektorie finden, welche alle unsere geraden Linien berührt, welche klar ist, dass sie die Evolute der vorgelegten Kurve AU ist; für diese werden wir also diese Gleichung $qda = 0$ haben, woher

$$(x - t)dv + vdt(1 + vv) = 0$$

wird, und daher

$$x = t - \frac{vdt(1+vv)}{dv},$$

und daher weiter

$$y = -u - \frac{dt(1+vv)}{dv},$$

welche die Koordinaten für die Evolute der vorgelegten Kurve sind, weiter wird es aber förderlich sein, weil

$$TP = x - t = -\frac{vdt(1+vv)}{dv}$$

ist, dieses Verhältnis bemerkt zu haben

$$TN : UN = TP : UM,$$

sodass

$$UN = -\frac{dt(1+vv)^{\frac{3}{2}}}{dv}$$

ist, welche der bekannte Ausdruck für den Krümmungsradius UM ist.

Wir wollen auch den Fall betrachten, in welchem $\alpha = \infty$ ist, damit wir alle orthogonalen Trajektorien finden. Aber dann geht die gefundene Gleichung in diese über

$$dx(1+pp) + pqda = 0,$$

das heißt

$$dx(1+vv) - \frac{xdv}{v} + \frac{tdv}{v} - dt(1+vv) = 0,$$

welche auf diese Form zurückgeführt wird

$$dx - \frac{xdv}{v(1+vv)} = dt - \frac{tdv}{v(1+vv)},$$

welche mit der allgemeinen Form

$$dx + Pxdv = qdv$$

verglichen

$$Pdv = -\frac{dv}{v(1+vv)}$$

gibt, daher

$$\int Pdv = \log\frac{\sqrt{1+vv}}{v} \quad \text{und} \quad e^{\int Pdv} = \frac{\sqrt{1+vv}}{v},$$

mit welcher Größe multipliziert unsere Gleichung

$$\frac{dx\sqrt{1+vv}}{v}-\frac{xdv}{vv\sqrt{1+vv}}=\frac{dt\sqrt{1+vv}}{v}-\frac{tdv}{vv\sqrt{1+vv}}$$

wird, deren Integral

$$\frac{x\sqrt{1+vv}}{v}=\frac{t\sqrt{1+vv}}{v}+c$$

ist, sodass

$$x=t+\frac{cv}{\sqrt{1+vv}}$$

und daher

$$y=\frac{c}{\sqrt{1+vv}}-u$$

ist.

Wenn wir also hier nun die Konstante $c=0$ setzen, werden wir $x=t$ und $y=-u$ haben, in welchem Fall die orthogonale Trajektorie unsere vorgelegte Kurve AU selbst ist, aber außer dieser sind noch unendlich viele andere gegeben, welche gefunden werden, wenn c nicht $=0$ ist, man nehme nämlich in unseren einzelnen Geraden die Stücke $U\mu=c$, und es ist offenkundig, dass

$$\frac{cv}{\sqrt{1+vv}}=T\pi \quad \text{und} \quad \frac{c}{\sqrt{1+vv}}=TU-\mu\pi$$

sein wird, nach Einsetzen von welchen wir

$$x=AT+T\pi=A\pi \quad \text{und} \quad y=\frac{c}{\sqrt{1+vv}}-u=-\mu\pi$$

haben werden, woraus man einsieht, dass alle durch diese Punkte μ gezeichneten Kurven, welche der Kurve AU parallel genannt zu werden pflegen, orthogonale Trajektorien sind, denn es ist bekannt, dass all diese Kurven eine gemeinsame Evolute haben.

Wenn aber der Schnittwinkel beliebig war, wird die gefundene Gleichung

$$\alpha dx(1+vv)=-(v-\alpha)\frac{xdv}{v}-(v-\alpha)(1+vv)dt+(v-\alpha)\frac{tdv}{v}$$

sein, welche auf diese Form reduziert werde:

$$dx + \frac{(v-\alpha)xdv}{\alpha v(1+vv)} = -\frac{(v-\alpha)dt}{\alpha} + \frac{(v-\alpha)tdv}{\alpha v(1+vv)} = -\frac{du}{\alpha} + dt + \frac{(v-\alpha)tdv}{\alpha v(1+vv)},$$

woher

$$\int Pdv = \frac{1}{\alpha}\arctan v + \log\frac{\sqrt{1+vv}}{v}$$

wird, woher die Rechnung auf eine exponentielle Größe zurückgeführt wird, in deren Exponent ein Winkel eingeht, dessen Tangens v ist.

PROBLEM 3

Nachdem irgendeine vorgelegte Kurve AU mit den Koordinaten $AT = t$ und $TU = u$ gegeben worden ist, wenn zu ihren einzelnen Punkten U nach irgendeinem gegebenen Gesetz die Geraden UM gezogen werden, die Trajektorien zu finden, welche all diese Geraden in einem gegebenen Winkel durchlaufen.

LÖSUNG

Wir wollen wie zuvor $du = vdt$ setzen und den Winkel $TUM = \varphi$ nennen, welcher entweder selbst oder aber sein Tangens oder Sinus durch sich auf die Kurve beziehende Koordinaten irgendwie bestimmt sei, sodass $d\varphi = \rho dt$ ist, und all diese Funktionen als Funktionen des Parameters angesehen werden können. Weil also UM eine aus den zu schneidenden Geraden ist, werden wir, nachdem auf ihr irgendeinen Punkt M genommen worden ist, für die Trajektorien $AP = x$ und $PM = y$ haben, und nun ist es wie zuvor ersichtlich, dass

$$\tan\varphi = \frac{x-t}{u+y}$$

sein wird, woher man

$$y = \frac{x}{\tan\varphi} - u - \frac{t}{\tan\varphi}$$

bestimmt.

Man differenziere diese Gleichung:

$$dy = dx \cot \varphi - \frac{xd\varphi}{\sin^2 \varphi} - vdt - dt \cot \varphi + \frac{td\varphi}{\sin^2 \varphi}$$

und es wird

$$p = \cot \varphi \quad \text{und} \quad 1 + pp = \frac{1}{\sin^2 \varphi}$$

und

$$qda = \frac{(t-x)d\varphi}{\sin^2 \varphi} - vdt - dt \cot \varphi$$

sein; daher, weil für die Trajektorien diese Gleichung gefunden worden ist

$$\alpha dx(1 + pp) + qda(\alpha p - 1) = 0,$$

welche nun zwei Variablen enthält und die eine x eine Dimension nicht übersteigt, wird ihre Lösung in unserer Macht sein.

Wir wollen aber hauptsächlich den Fall entwickeln, in welchem $\alpha = 0$ ist, dass man eine Kurve findet, welche alle diese vorgelegten Geraden berührt, für diese Gleichung wird also $qda = 0$ sein oder

$$x = t - \frac{vdt \cdot \sin^2 \varphi}{d\varphi} - \frac{dt \sin \varphi \cos \varphi}{d\varphi} = t - \frac{v \sin^2 \varphi}{\rho} - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\rho}$$

und daher

$$y = -u - \frac{v \sin \varphi \cos \varphi}{\rho} - \frac{\cos^2 \varphi}{\rho},$$

weil also daher

$$x - t = -\frac{v \sin^2 \varphi}{\rho} - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\rho}$$

ist, wird daraus die Gerade

$$UM = -\frac{v \sin \varphi + \cos \varphi}{\rho}$$

gefolgert; es ist aber zu bemerken, dass der Punkt M der Punkt ist, in welchem sich zwei Geraden von dieser Art unendlich nahe kommen.